УДК 519.862.6

***М. П. Базилевский*** [1]

[1] *Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация*

# ТЕСТ ГЛЕЙЗЕРА НА ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНОСТЬ В ОСТАТКАХ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ КАК ЗАДАЧА ЧАСТИЧНО-БУЛЕВОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Аннотация**. *Статья посвящена проблеме обнаружения гетероскедастичности в остатках регрессионной модели, оцениваемой с помощью метода наименьших квадратов. Рассмотрена известная процедура теста Глейзера, предполагающая построение вспомогательных зависимостей модулей остатков регрессии от преобразований независимых переменных. Найдены оценки параметров и критерии детерминации для вспомогательных регрессий в случае оценивания стандартизованной регрессии. Полученные результаты позволили сформулировать процедуру теста Глейзера для заданного сценария как задачу частично-булевого линейного программирования.*

**Ключевые слова**: *регрессионная модель, метод наименьших квадратов, гетероскедастичность, тест Глейзера, стандартизованная регрессия, задача частично-булевого линейного программирования.*

***M. P. Bazilevskiy*** [1]

[1] *Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia*

# GLAZER'S TEST FOR HETEROSCEDASTICITY IN RESIDUALS OF REGRESSION MODEL AS A PROBLEM OF MIXED 0-1 INTEGER LINEAR PROGRAMMING

**Abstract.** *The article is devoted to the problem of detecting heteroscedasticity in the remnants of the regression model, estimated using the method of least squares. A well-known procedure for the Glaser test is considered, which assumes the construction of auxiliary dependencies of moduli of regression residuals on transformations of independent variables. Parametric estimates and determination criteria for auxiliary regressions in the case of standardized regression estimation are found. The results obtained allowed us to formulate the Glaser test procedure for a given scenario as a task of partial-Boolean linear programming.*

**Keywords**: *regression model, ordinary least squares, heteroscedasticity, Glaser test, standardized regression, mixed 0-1 integer linear programming problem.*

## Введение

Одним из условий применимости метода наименьших квадратов (МНК) является постоянство дисперсии случайной ошибки регрессионной модели, называемое гомоскедастичностью [1, 2]. Если это условие нарушается, то говорят о гетероскедастичности. Непостоянство дисперсии ошибок регрессии означает, что для одних значений объясняющих переменных «разброс» значений зависимой переменной будет больше, а для других значений меньше. Например, зависимость веса людей от их роста. Естественно ожидать, что чем выше человек, тем больше его разброс по весу.

Гетероскедастичность приводит к тому, что МНК-оценки параметров регрессии будут несмещенными, состоятельными, но не самыми эффективными, т. е. найдутся другие оценки, которые имеют меньшую дисперсию и при этом являются несмещенными. Но ещё хуже то, что стандартные ошибки оценок коэффициентов регрессии будут несостоятельными, т. е. даже при большом количестве наблюдений они не приближаются к своим истинным значениям. Это приводит к тому, что выводы о качестве полученных оценок могут быть неадекватными. Поэтому тестирование регрессий на гетероскедастичность является одной из необходимых процедур при построении регрессионных моделей.

Для обнаружения гетероскедастичности разработаны статистические тесты Уайта, Бройша – Пагана, Парка, Голдфелда – Куандта, Глейзера и др. [1, 2] Поскольку единственным из них, в котором при оценивании вспомогательных моделей используются не квадраты, а модули остатков регрессии, является тест Глейзера, то была поставлена цель – сформулировать этот тест в виде задачи частично-булевого линейного программирования (ЧБЛП).

**Тест Глейзера**

Рассмотрим модель множественной линейной регрессии:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2} + \ldots + \alpha_m x_{im} + \varepsilon_i, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где $y_i$, $i = \overline{1,n}$ – значения объясняемой (зависимой) переменной $y$;

$x_{i1}$, $x_{i2}$, …, $x_{im}$, $i = \overline{1,n}$ – значения $m$ объясняющих (независимых) переменных $x_1$, $x_2$, …, $x_m$;

$\varepsilon_i$, $i = \overline{1,n}$ – ошибки аппроксимации;

$\alpha_0$, $\alpha_1$, …, $\alpha_m$ – неизвестные параметры;

$n$ – объем выборки.

Пусть найденное с помощью МНК уравнение линейной регрессии (1) имеет вид:

$$\tilde{y} = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 x_1 + \tilde{\alpha}_2 x_2 + \ldots + \tilde{\alpha}_m x_m, \tag{2}$$

где $\tilde{\alpha}_0$, $\tilde{\alpha}_1$, …, $\tilde{\alpha}_m$ – МНК-оценки неизвестных параметров.

Тогда с помощью формулы (2) можно получить остатки линейной регрессии:

$$e_i = y_i - \tilde{y}_i, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где $\tilde{y}_i$, $i = \overline{1,n}$ – рассчитанные по модели значения зависимой переменной.

Для проверки остатков линейной регрессии на гетероскедастичность с помощью теста Глейзера [1, 2] нулевая и альтернативная гипотезы формулируются следующим образом:

$$H_0 : D(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 = \text{const} \ \text{(гомоскедастичность)},$$

$$H_1 : D(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 \neq \text{const} \ \text{(гетероскедастичность)},$$

где $D(\varepsilon_i)$ – дисперсия ошибки, а $\sigma_i$ – среднеквадратическое отклонение.

Тест Глейзера основан на предпосылке о возможной зависимости среднеквадратического отклонения ошибки $\sigma_i$ от некоторой объясняющей переменной $x_k$ ($1 \le k \le m$):

$$\sigma_i = A + Bx_{ik}^{\gamma} + \xi_i, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где $A$, $B$ – неизвестные параметры, $\gamma$ – некоторое заданное число, $\xi_i$, $i = \overline{1,n}$ – новые ошибки аппроксимации.

Тогда, с учетом предположения (4), нулевую и альтернативную гипотезы для теста Глейзера можно переформулировать следующим образом:

$$H_0 : B = 0 \ \text{(гомоскедастичность)},$$

$$H_1 : B \neq 0 \ \text{(гетероскедастичность)}.$$

Поскольку среднеквадратические отклонения ошибок $\sigma_i$ в уравнении (4) неизвестны, то они заменяются на известные абсолютные значения остатков линейной регрессии:

$$|e_i| = A + Bx_{ik}^{\gamma} + \xi_i, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Процедура теста Глейзера представима следующим образом. Сначала для различных значений параметра $\gamma$ из некоторого интервала $[\gamma_1; \gamma_2]$ (обычно $\gamma \in \{-1; -0{,}5; 0{,}5; 1\}$) с помощью МНК оцениваются неизвестные параметры $A$ и $B$ вспомогательных регрессий (5). Затем выбирается модель с наибольшим значением критерия детерминации $R^2$. После чего с помощью t-критерия Стьюдента проверяется значимость коэффициента $B$, либо, что то же самое, с помощью F-критерия Фишера проверяется значимость модели в целом. Если наблюдаемое значение критерия превышает критическое значение, то нулевая гипотеза $H_0$ отвергается и модель признается гетероскедастичной, в противном случае – гомоскедастичной.

Достоинством теста Глейзера является не только возможность обнаружения с помощью него гетероскедастичности в остатках, но и возможность выявлять конкретный вид зависимости этих остатков от каждой независимой переменной. Как известно, для устранения гетероскедастичности часто применяется взвешенный метод наименьших квадратов (ВМНК):

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i^2 \to \min ,$$

где $w_i = 1/\sigma_i^2$, $i = \overline{1,n}$ – неизвестные веса. Вычислив по наилучшей вспомогательной регрессии (5) модули остатков $|e_i|$, можно использовать их для определения весов по формуле $w_i = 1/e_i^2$, $i = \overline{1,n}$.

**Тест Глейзера для стандартизованной регрессии**

Предварительно проведем нормирование зависимой переменной $y$ и независимых переменных $x_1$, $x_2$, …, $x_m$ по формулам:

$$y_i^* = \frac{y_i - \overline{y}}{\sigma_y}, \qquad i = \overline{1,n},$$

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \overline{x}_j}{\sigma_{x_j}}, \qquad i = \overline{1,n}, \qquad j = \overline{1,m},$$

где $y^*$, $x_j^*$, $j = \overline{1,m}$ – стандартизованные переменные, для которых средние значения равны 0, а суммы квадратов равны 1.

Тогда стандартизованное уравнение регрессии (1) примет вид:

$$y_i^* = \beta_1 x_{i1}^* + \beta_2 x_{i2}^* + \ldots + \beta_m x_{im}^* + \varepsilon_i^*, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{6}$$

где $\beta_j$, $j = \overline{1,m}$ – стандартизованные коэффициенты регрессии (бета-коэффициенты), $\varepsilon_i^*$, $i = \overline{1,n}$ – ошибки аппроксимации.

МНК-оценки $\tilde{\beta}_j$, $j = \overline{1,m}$, регрессии (6) находятся с помощью решения системы линейных алгебраических уравнений [2, 3]:

$$K\tilde{\beta} = h, \tag{7}$$

где $K$ – матрица коэффициентов корреляции между объясняющими переменными (интеркорреляционная матрица):

$$K = \begin{bmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \cdots & r_{x_1x_m} \\ r_{x_1x_2} & 1 & \cdots & r_{x_2x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{x_1x_m} & r_{x_2x_m} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$h$ – вектор коэффициентов корреляции объясняющих переменных с объясняемой переменной:

$$h = \begin{bmatrix} r_{yx_1} & r_{yx_2} & \cdots & r_{yx_m} \end{bmatrix}^T.$$

Поскольку стандартизованная регрессия (6) содержит новые ошибки аппроксимации $\varepsilon_i^*$, $i = \overline{1,n}$, отличные от ошибок $\varepsilon_i$, $i = \overline{1,n}$, модели (1), то можно предположить, что для регрессии (6) формулы оценок вспомогательных моделей, как и сами оценки, будут иными. Прежде, чем определить эти оценки, приведем строгую постановку задачи обнаружения гетероскедастичности с помощью теста Глейзера.

Пусть предполагается зависимость остатков $|e_i|$ линейной регрессии от каждой из $m$ независимых переменных $x_1$, $x_2$, …, $x_m$. Пусть параметр $\gamma$ принимает $p$ значений: $\gamma_1$, $\gamma_2$,

…, $\gamma_p$. Тогда в общей сложности при реализации теста Глейзера требуется построить $mp$ вспомогательных регрессий. Из этих регрессий необходимо выбрать модель с наибольшим значением критерия детерминации $R^2$.

Проведем нормирование преобразованных независимых переменных $x_j^{\gamma_k}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,p}$, по приведенным выше формулам:

$$z_{ijk}=\frac{x_{ij}^{\gamma_k}-\overline{x_j^{\gamma_k}}}{\sigma_{x_j^{\gamma_k}}},\qquad i=\overline{1,n},\qquad j=\overline{1,m},\qquad k=\overline{1,p},$$

где $z_{jk}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,p}$ – стандартизованные переменные, для которых средние значения равны 0, а суммы квадратов равны 1.

Обозначим остатки регрессии (6) в виде $e_i^*$. Тогда, согласно тесту Глейзера, вспомогательные регрессии примут вид:

$$\left|e_i^*\right|=a_{jk}+b_{jk}z_{ijk}+\xi_{ijk}^*,\qquad i=\overline{1,n},\qquad j=\overline{1,m},\qquad k=\overline{1,p},\tag{8}$$

где $a_{jk}$ и $b_{jk}$ – неизвестные параметры; $\xi_{ijk}^*$ – ошибки аппроксимации.

Известно, что оценки линейных регрессий (8) находятся по формулам [2]:

$$b_{jk}^*=\frac{\overline{\left|e^*\right|\cdot z_{jk}}-\overline{\left|e^*\right|}\cdot\overline{z_{jk}}}{\sigma_{z_{jk}}^2},\qquad a_{jk}^*=\overline{\left|e^*\right|}-b_{jk}^*\cdot\overline{z_{jk}},\qquad j=\overline{1,m},\qquad k=\overline{1,p}.\tag{9}$$

Учитывая, что $\forall z_{jk}$: $\overline{z_{jk}}=0$, $\sum_{i=1}^{n}z_{ijk}^2=1$, формулы (9) примут вид:

$$b_{jk}^*=\sum_{i=1}^{n}\left|e_i^*\right|z_{ijk},\qquad a_{jk}^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|e_i^*\right|,\qquad j=\overline{1,m},\qquad k=\overline{1,p}.\tag{10}$$

Таким образом, для стандартизованной регрессии (6) угловые коэффициенты $b_{jk}^*$ вспомогательных моделей для теста Глейзера являются линейными комбинациями $\sum_{i=1}^{n}\left|e_i^*\right|z_{ijk}$, а свободные члены $a_{jk}^*$ постоянны и равны $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|e_i^*\right|$. Полученные формулы легко реализуются в виде линейных ограничений в задаче линейного программирования.

Согласно тесту Глейзера, из вспомогательных регрессий необходимо выбрать модель с наибольшим значением критерия детерминации. Известно, что коэффициенты корреляции для моделей (8) находятся по формуле [1, 2]:

$$r\left(z_{jk},\left|e^*\right|\right)=\frac{\sigma_{z_{jk}}}{\sigma_{\left|e^*\right|}}b_{jk}^*,\qquad j=\overline{1,m},\qquad k=\overline{1,p}.\tag{11}$$

Учитывая, что $\sigma_{z_{jk}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sigma_{\left|e^*\right|}=\sqrt{\overline{\left(e^*\right)^2}-\left(\overline{\left|e^*\right|}\right)^2}$, формулы (11) примут вид:

$$r\left(z_{jk},\left|e^*\right|\right)=\frac{b_{jk}^*}{\sqrt{n}\sigma_{\left|e^*\right|}}=\frac{b_{jk}^*}{\sqrt{n}\sqrt{\overline{\left(e^*\right)^2}-\left(\overline{\left|e^*\right|}\right)^2}},\qquad j=\overline{1,m},\qquad k=\overline{1,p}.\tag{12}$$

Для стандартизованной регрессии (6) $\sum_{i=1}^{n}\left(e^*\right)^2=1-R^2$, где $R^2$ – её критерий детерминации. Тогда формулы (12) примут вид:

$$r\left(z_{jk},\left|e^*\right|\right)=\frac{b^*_{jk}}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{1-R^2}{n}-\left(\overline{\left|e^*\right|}\right)^2}}=\frac{b^*_{jk}}{\sqrt{1-R^2-n\left(\overline{\left|e^*\right|}\right)^2}}, \qquad j=\overline{1,m}, \qquad k=\overline{1,p}. \qquad (13)$$

Поскольку для парной линейной регрессии квадрат коэффициента корреляции между объясняемой и объясняющей переменной равен коэффициенту детерминации [1, 2], то коэффициенты детерминации вспомогательных регрессий (8) будут иметь вид:

$$R^2_{jk}=\frac{\left(b^*_{jk}\right)^2}{1-R^2-n\left(\overline{\left|e^*\right|}\right)^2}, \qquad j=\overline{1,m}, \qquad k=\overline{1,p}. \qquad (14)$$

По формулам (13) и (14) можно сделать следующие выводы.

1. Критерии детерминации $R^2_{jk}$ вспомогательных регрессий (8) нелинейно зависят от критерия детерминации стандартизованной регрессии $R^2$, от объема выборки $n$ и от величины $\left(\overline{\left|e^*\right|}\right)^2$. При этом, если $R^2\to 0$, то $\left(\overline{\left|e^*\right|}\right)^2\to 0$ и $R^2_{jk}\approx\left(b^*_{jk}\right)^2$.

2. Критерии детерминации $R^2_{jk}$ вспомогательных регрессий (8) прямо пропорциональные квадратам их угловых коэффициентов $\left(b^*_{jk}\right)^2$. Из этого следует, что выбор вспомогательной регрессии с наибольшим значением критерия детерминации равносилен задаче $\left(b^*_{jk}\right)^2\to\max$ или $\left|b^*_{jk}\right|\to\max$.

3. Значения угловых коэффициентов $b^*_{jk}$ вспомогательных регрессий всегда принадлежат промежутку $[-1;+1]$.

**Задача частично-булевого линейного программирования.** В настоящее время, благодаря развитию вычислительных технологий и разработке новых методов решения, задачи математического программирования играют важную роль в регрессионном анализе. С некоторыми из таких задач можно ознакомиться, например, в работах [3–6]. При этом автору еще ни разу не приходилось сталкиваться с работами, посвященными обнаружению гетероскедастичности с помощью аппарата математического программирования.

Тест Глейзера может быть выполнен по одному из следующих сценариев.

1. Для всех независимых переменных выбирается одна наилучшая вспомогательная регрессия.

2. Для конкретной независимой переменной выбирается одна наилучшая вспомогательная регрессия.

3. Для каждой независимой переменной выбирается одна наилучшая вспомогательная регрессия.

Рассмотрим первый сценарий, когда для всех независимых переменных выбирается одна наилучшая вспомогательная регрессия. Оценки бета-коэффициентов стандартизованной регрессии (6) находятся из решения системы (7), откуда следуют линейные ограничения:

$$\sum_{j=1}^{m} r_{x_i x_j}\beta_j=r_{yx_i}, \qquad i=\overline{1,m}. \qquad (15)$$

Вычислив бета-коэффициенты, остатки $e^*_i$, $i=\overline{1,n}$, стандартизованной регрессии будут равны:

$$e^*_i=y^*_i-\sum_{j=1}^{m}x^*_{ij}\beta_j, \qquad i=\overline{1,n}. \qquad (16)$$

Представим эти остатки в виде:

$$u_i-v_i=e^*_i, \qquad i=\overline{1,n}, \qquad (17)$$

где $u_i \geq 0$ – «положительная» часть числа $e_i^*$, а $v_i \geq 0$ – его «отрицательная» часть, причем, в силу определения, $\forall i$ должны выполняться равенства $u_i v_i = 0$.

С учётом формул (10), оценки вспомогательных регрессий удовлетворяют следующим ограничениям:

$$b_{jk}^* = \sum_{i=1}^{n} z_{ijk}(u_i + v_i), \qquad j = \overline{1,m}, \qquad k = \overline{1,p}. \tag{18}$$

Поскольку задача выбора вспомогательной регрессии равносильна задаче $\left|b_{jk}^*\right| \to \max$, то представим угловые коэффициенты $b_{jk}^*$ в виде:

$$b_{jk} = \eta_{jk} - \mu_{jk}, \qquad j = \overline{1,m}, \qquad k = \overline{1,p}, \tag{19}$$

где $\eta_{jk} \geq 0$ – «положительная» часть числа $b_{jk}$, а $\mu_{jk} \geq 0$ – его «отрицательная» часть, причем, $\forall j,k$ должно выполняться $\eta_{jk}\mu_{jk} = 0$.

Тогда из выражения $\left|b_{jk}^*\right| \to \max$ следует справедливость неравенств:

$$r - (\eta_{jk} + \mu_{jk}) \geq 0, \qquad j = \overline{1,m}, \qquad k = \overline{1,p}, \tag{20}$$

где $r$ – вспомогательная переменная, которая представляет собой величину, равную максимальному значению $\left|b_{jk}^*\right|$ для таких номеров $j_0$, $k_0$, для которых неравенство (20) обращается в равенство. Для обращения хотя бы одного из неравенств (20) в равенство, воспользуемся приемом, описанным в работе [7].

Введем $mp$ булевых переменных $\delta_{jk}$, $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,p}$, и сформируем ограничения:

$$r - (\eta_{jk} + \mu_{jk}) \leq M(1 - \delta_{jk}), \qquad j = \overline{1,m}, \qquad k = \overline{1,p}, \tag{21}$$

$$\delta_{jk} \in \{0{,}1\}, \qquad j = \overline{1,m}, \qquad k = \overline{1,p}, \tag{22}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} \delta_{jk} = 1, \tag{23}$$

где $M$ – заранее выбранное большое положительное число. Стоит отметить, что, так как значения угловых коэффициентов $b_{jk}^*$ вспомогательных регрессий всегда принадлежат промежутку $[-1; +1]$, то число $M$ достаточно взять равным единице.

Из условий $u_i v_i = 0$ и $\eta_{jk}\mu_{jk} = 0$ следует, что функционал задачи необходимо представить в виде:

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}(\eta_{jk} + \mu_{jk}) \to \min. \tag{24}$$

Условия неотрицательности переменных имеют вид:

$$u_i \geq 0, \qquad v_i \geq 0, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{25}$$

$$\eta_{jk} \geq 0, \qquad \mu_{jk} \geq 0, \qquad j = \overline{1,m}, \qquad k = \overline{1,p}. \tag{26}$$

Таким образом, решение задачи ЧБЛП (24) с ограничениями (15) – (23), (25), (26) гарантирует для всех независимых переменных выбор одной наилучшей вспомогательной регрессии.

Для второго сценария, когда для одной конкретной независимой переменной выбирается одна наилучшая вспомогательная регрессия, в предыдущей задаче необходимо лишь зафиксировать конкретное значение переменной $j$. Для третьего сценария, когда для каждой независимой переменной выбирается одна наилучшая вспомогательная регрессия, необходимо ограничения (20), (21) и (23) заменить на следующие:

$$r_j - (\eta_{jk} + \mu_{jk}) \geq 0, \qquad j = \overline{1,m}, \qquad k = \overline{1,p}, \tag{27}$$

$$r_j - \left(\eta_{jk} + \mu_{jk}\right) \le M\left(1 - \delta_{jk}\right), \qquad j = \overline{1,m}, \qquad k = \overline{1,p}, \tag{28}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \delta_{jk} = 1, \qquad j = \overline{1,m}, \tag{29}$$

где $r_j$ – вспомогательная переменная, которая представляет собой величину, равную максимальному значению $\left|b_{jk}^*\right|$ для независимой переменной $j$.

После того, как для заданного сценария найдено решение задачи ЧБЛП, необходимо по формуле (14) пересчитать коэффициент детерминации вспомогательной регрессии и сделать вывод о наличии или отсутствии гетероскедастичности в регрессионной модели.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 311 с.

2. Елисеева И.И., Курышева С.В., Костеева Т.В. Эконометрика. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 576 с.

3. Базилевский М.П. Сведение задачи отбора информативных регрессоров при оценивании линейной регрессионной модели по методу наименьших квадратов к задаче частично-булевого линейного программирования // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – Воронеж, 2018. – Т. 6. – № 1 – URL: https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2018/01/Bazilevskiy_1_1_18.pdf.

4. Носков С.И. Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных. – Иркутск: Облинформпечать, 1996. – 320 с.

5. Konno H., Yamamoto R. Choosing the best set of variables in regression analysis using integer programming. Journal of Global Optimization, 2009. Vol. 44, no. 2, pp. 272-282.

6. Базилевский М.П., Носков С.И. Формализация задачи построения линейно-мультипликативной регрессии в виде задачи частично-булевого линейного программирования // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск, 2017. – №3(55). – С.101-105.

7. Иванова Н.К., Лебедева С.А., Носков С.И. Идентификация параметров некоторых негладких регрессий // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. – Иркутск, 2016. – Вып. 17. – С. 111-114.

## REFERENCES

1. Kremer N.SH., Putko B.A. *Ekonometrika* [Econometrics]. Moscow: YUNITI-DANA, 2002, 311 p.

2. Eliseeva I.I., Kurysheva S.V., Kosteeva T.V. *Ekonometrika* [Econometrics]. Moscow: Finansy i statistika, 2007, 576 p.

3. Bazilevskij M.P. *Svedenie zadachi otbora informativnyh regressorov pri ocenivanii linejnoj regressionnoj modeli po metodu naimen'shih kvadratov k zadache chastichno-bulevogo linejnogo programmirovaniya* [Reduction the problem of subset selection when estimating a linear regression model by the ordinary least squares to the problem of mixed integer linear programming]. *Modelirovanie, optimizaciya i informacionnye tekhnologii* [Modeling, optimization and information technologies]. Voronezh, 2018, vol. 6, no. 1, URL: https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2018/01/Bazilevskiy_1_1_18.pdf.

4. Noskov S.I. *Tehnologija modelirovanija ob'ektov s nestabil'nym funkcionirovaniem i neopredelennost'ju v dannyh* [Modeling technology for objects with unstable operation and data uncertainty]. Irkutsk: RIC GP «Oblinformpechat'» Publ., 1996, 321 p.

5. Konno H., Yamamoto R. Choosing the best set of variables in regression analysis using integer programming. Journal of Global Optimization, 2009. Vol. 44, no. 2, pp. 272-282.

6. Bazilevskij M.P., Noskov S.I. *Formalizaciya zadachi postroeniya linejno-mul'tiplikativnoj regressii v vide zadachi chastichno-bulevogo linejnogo programmirovaniya* [Formalization of the problem of constructing linear-multiplicative regression in the form of the problem of mixed integer

linear programming]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyj analiz. Modelirovanie*. [Modern Technologies. System Analysis. Modeling]. Irkutsk, 2017, no. 3 (55), pp.101-105.

7. Ivanova N.K., Lebedeva S.A., Noskov S.I. *Identifikaciya parametrov nekotoryh negladkih regressij* [Identification of the parameters of some non-smooth regressions]. *Informacionnye tekhnologii i problemy matematicheskogo modelirovaniya slozhnyh system* [Information technologies and problems of mathematical modeling of complex systems]. Irkutsk, 2016, no. 17, pp. 111-114.

## Информация об авторах

*Михаил Павлович Базилевский* - к. т. н., доцент, доцент кафедры «Математика», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: mik2178@yandex.ru

## Authors

*Mikhail Pavlovich Bazilevskiy*– Ph.D. in Engineering Science, Associate Professor, the Subdepartment of Mathematics, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: mik2178@yandex.ru

## Для цитирования

Базилевский М. М. Тест Глейзера на гетероскедастичность в остатках регрессионной модели как задача частично-булевого линейного программирования // «Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами»: электрон. науч. журн. – 2018. – №1. – С. 21-28 – Режим доступа: http://ismm-irgups.ru/toma/11-2018, свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус., англ. (дата обращения: 01.10.2018)

## For citation

Bazilevskiy M. M. Test Glejzera na geteroskedastichnost' v ostatkah regressionnoj modeli kak zadacha chastichno-bulevogo linejnogo programmirovaniya [Glazer's test for a geteroskedastichnost in the remains of regression model as a problem of partial and Boolean linear programming] // Informacionnye tehnologii i matematicheskoe modelirovanie v upravlenii slozhnymi sistemami: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal [Information technology and mathematical modeling in the management of complex systems: electronic scientific journal], 2018. No. 1. P. 21-28. [Accessed 01/10/18]