УДК 681.5.015

С.П. Круглов [1]

[1] *Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация*

МОДИФИКАЦИИ РЕКУРРЕНТНОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С ФАКТОРОМ ЗАБЫВАНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕКУЩЕГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Аннотация. В статье предлагаются две модификации известного рекуррентного метода наименьших квадратов с фактором забывания для текущей параметрической идентификации математической модели динамического объекта управления в условиях возможности возникновения линейной зависимости используемых регрессоров и при ограниченной точности вычислений в используемой ЦВМ. Модификации основаны на регуляризирующей по-Тихонову процедуре и на отключении из идентификации регрессоров, вносящих линейную зависимость. Данные модификации повышают функциональную устойчивость процедуры текущей идентификации для построения адаптивной системы управления.

Ключевые слова: алгоритм текущей идентификации, математическая модель, сходимость оценок, линейная зависимость регрессоров, функциональная устойчивость алгоритма текущей идентификации.

S.P. Kruglov [1]

[1] *Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia*

MODIFICATIONS OF THE REKKURENT METHOD OF LEAST SQUARES WITH FORGETTING FACTOR FOR THE FUNCTIONAL STABILITY OF THE CURRENT PARAMETRICAL ESTIMATION OF DYNAMIC PROCESSES

Abstract. In article two modifications of the known recurrent method of least squares with a forgetting factor for the current parametrical identification of mathematical model of a dynamic control object in the conditions of possibility of the linear relation of the used regressors are offered and with a limited accuracy of calculations in the used digital computer. Modifications are based on Tikhonov regularization to the procedure and on shutdown from identification of the regressors bringing the linear relation. These modifications increase the functional stability of the procedure of the current identification for creation of an adaptive control system.

Keywords: algorithm of the current identification, mathematical model, convergence of estimates, the linear relation of regressors, the functional stability of an algorithm of the current identification.

Введение

Одним из подходов к построению адаптивного управления динамическими процессами является использование текущей параметрической линейной идентификации математической модели объекта управления (см., например, [1]). В этом случае задача идентификации сводится к нахождению неизвестных параметров строк системы дифференциальных (разностных, дискретных) уравнений математической модели объекта. Пусть одна из этих строк в детерминированной постановке (для раскрытия сути предложений можно ограничиться именно ей) описывается в виде:

$$z(t)=\theta_1 x_1(t)+\theta_2 x_2(t)+...+\theta_n x_n(t)=\Theta^{\text{т}} X(t), \text{ или } z(t)=\sum_{j=1}^{n} y_j(t), \tag{1}$$

где $z(t)$ – отклик объекта; θ_j – неизвестные параметры (коэффициенты дифференциального уравнения, здесь для упрощения дальнейших выкладок показано, что они постоянные, но предположим также, что они могут изменяться во времени), $j=\overline{1,n}$; x_j – регрессоры – переменные дифференциального уравнения; t – текущее время; $\Theta=\left[\theta_1,\theta_2,...,\theta_n\right]^{\text{т}}$ и

$X(t)=\left[x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)\right]^{\text{т}}$ – векторы искомых параметров и регрессоров (факторных переменных); $y_j(t)\overset{\Delta}{=}\theta_j x_j(t)$ – j-ый аддитивный член отклика; оценки параметров, доставляемые алгоритмом идентификации будем обозначать как $\hat{\Theta}=\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,...,\hat{\theta}_n\right]^{\text{ò}}$.

Известно, что для сходимости оценок (идентифицируемости): $\hat{\Theta}\to\Theta$ требуется, чтобы компоненты вектор-функции регрессоров были линейно независимы по времени или строго линейно-независимы (линейно-независимы на скользящем интервале времени). Для динамических линейных объектов, описываемых в пространстве состояний, для этого требуется управляемость по-Калману этого объекта, как необходимое условие идентифицируемости. Достаточным условием идентифицируемости в дополнение к необходимому является проведение идентификации на переходном процессе, либо на установившемся процессе (если объект устойчив) с соблюдением требования определенного «богатства» входного сигнала. В частности, для объекта с пространством состояния размерностью n и скалярным ходом для этого требуется спектральный состав входного сигнала с не менее $n/2$ гармониками. Если объект управления находится внутри замкнутого контура системы управления с линейной обратной связью, то часть регрессоров всегда будет содержать линейно-зависимые компоненты [1].

Таким образом, идентификация математической модели объекта, не управляемого по-Калману, с «небогатым» входным сигналом на установившемся процессе, либо в условиях линейной обратной связи порождают известные проблемы получения оценок и функционирования алгоритма идентификации.

В настоящей работе мы будем анализировать рекуррентный метод наименьших квадратов с фактором забывания, как наиболее эффективный для параметрической идентификации математической модели квазистационарного объекта управления [2,3]. Этот алгоритм является рекуррентной реализацией прямого (не рекуррентного) метода наименьших квадратов с фактором забывания, поэтому их свойства одинаковы. Последний формируется путем умножения дискретной формы выражения (1) на $X_k^{\text{т}}$ справа, где $k=0,1,2,...,i$ − дискретные моменты времени; умножения на коэффициент $\beta_{\text{заб}}^{i-k}$, где $0<\beta_{\text{заб}}<1, \beta_{\text{заб}}\to 1$ − назначаемый фактор забывания; суммирования дискретных выборок. В результате получаем оценку в момент времени i посредством ее осреднения из накопленных данных при выносе из под знака суммы:

$$\hat{\Theta}_i=P_i\left(\sum_{k=0}^{i}X_k z_k \beta_{\text{çàá}}^{i-k}\right),\quad P_i\overset{\Delta}{=}\left(\sum_{k=0}^{i}X_k X_k^{\text{ò}}\beta_{\text{çàá}}^{i-k}\right)^{-1}. \tag{2}$$

Фактор забывания необходим для более точного оценивания переменных по времени параметров за счет повышения «вклада» в формируемые оценки более поздних измерений. Известно, что процесс забывания старой информации имеет апериодический характер с постоянной времени ($T_{\text{заб}}$), равной [3]:

$$T_{\text{заб}}=\Delta t/\Delta\beta_{\text{заб}}\,, \tag{3}$$

где Δt − шаг временной дискретизации, $\Delta\beta_{\text{заб}}\overset{\Delta}{=}1-\beta_{\text{заб}}=\Delta t/T_{\text{заб}}$, $\Delta\beta_{\text{заб}}>0, \Delta\beta_{\text{заб}}\to 0$.

На вырожденном движении исследуемого объекта, когда компоненты вектора регрессоров близки к линейной зависимости, матрица P^{-1} будет близка к вырожденной с большим числом обусловленности, а значит алгебраическая процедура обращения этой матрицы связана с большими погрешностями [4]. Как результат − алгоритм идентификации «разваливается», что проявляется в неустойчивости поведения оценок, больших их ошибок, значительной неточности описания полученной моделью отклика объекта управления и пр. Синтез адаптивного закона управления, построенного на таких оценках, также сопряжен с большими погрешностями. Особенно это актуально при реализации алгоритма текущей идентификации в микроконтроллере с небольшой длиной разрядной сетки.

Налицо задача обеспечения функционально устойчивого текущего оценивания параметров математической модели динамического объекта управления с использованием рекуррентного метода наименьших квадратов с фактором забывания в условиях постоянной или эпизодичной линейной зависимости компонент вектор-функции $X(t)$ при невысокой точности представления данных в ЦВМ. Под функциональной устойчивостью алгоритма текущей параметрической идентификации будем понимать устойчивое поведение доставляемых им оценок и достаточно точное описание полученной моделью отклика объекта управления. Данная работа посвящена решению этой задачи в виде формирования модификации известной схемы указанного алгоритма.

Основные соотношения рекуррентного метода наименьших квадратов с фактором забывания

Здесь приведем известные зависимости по выводу рассматриваемого алгоритма, поскольку они потребуются для дальнейших обсуждений [2].

Из равенства (2) можно записать

$$P_i^{-1}\hat{\Theta}_i = \sum_{k=0}^{i} X_k z_k \beta_{\text{çàá}}^{i-k} = \beta_{\text{çàá}}\left(\sum_{k=0}^{i-1} X_k z_k \beta_{\text{çàá}}^{i-1-k}\right) + X_i z_i = \beta_{\text{çàá}} P_{i-1}^{-1}\hat{\Theta}_{i-1} + X_i z_i + X_i X_i^{\text{ò}}\hat{\Theta}_{i-1} - X_i X_i^{\text{ò}}\hat{\Theta}_{i-1}.$$

Комбинируя слагаемые этого равенства, получим

$$P_i^{-1}\hat{\Theta}_i = \underbrace{\left(\beta_{\text{çàá}} P_{i-1}^{-1} + X_i X_i^{\text{ò}}\right)}_{P_i^{-1}}\hat{\Theta}_{i-1} + X_i\left(z_i - X_i^{\text{ò}}\hat{\Theta}_{i-1}\right),$$

Или

$$\hat{\Theta}_i = \hat{\Theta}_{i-1} + P_i X_i\left(z_i - X_i^{\text{ò}}\hat{\Theta}_{i-1}\right). \tag{4}$$

Также в соответствии с (2) запишем

$$P_i^{-1} = \sum_{k=0}^{i} X_k X_k^{\text{т}} \beta_{\text{заб}}^{i-k} = \beta_{\text{заб}}\sum_{k=0}^{i-1} X_k X_k^{\text{т}} \beta_{\text{заб}}^{i-1-k} + X_i X_i^{\text{т}} = \beta_{\text{заб}} P_{i-1}^{-1} + X_i X_i^{\text{т}}$$

Умножим полученное слева на P_i, а справа на P_{i-1}:

$$P_{i-1} = \beta_{\text{заб}} P_i + P_i X_i X_i^{\text{т}} P_{i-1}. \tag{5}$$

Далее результат умножим справа на $\beta_{\text{заб}}^{-1} X_i$ и после упрощения зависимости получим

$$\beta_{\text{заб}}^{-1} P_{i-1} X_i = P_i X_i\left(1 + \beta_{\text{заб}}^{-1} X_i^{\text{т}} P_{i-1} X_i\right).$$

Умножим результат справа на $X_i^{\text{т}} P_{i-1} / \left(1 + \beta_{\text{заб}}^{-1} X_i^{\text{т}} P_{i-1} X_i\right)$

$$\beta_{\text{заб}}^{-1} P_{i-1} X_i \; X_i^{\text{т}} P_{i-1} / \left(1 + \beta_{\text{заб}}^{-1} X_i^{\text{т}} P_{i-1} X_i\right) = P_i X_i X_i^{\text{т}} P_{i-1}.$$

Заменяя правую часть полученного равенства по соотношению (5), найдем

$$\beta_{\text{заб}} P_i = P_{i-1} - \beta_{\text{заб}}^{-1} P_{i-1} X_i \, X_i^{\text{т}} P_{i-1} \Big/ \left(1 + \beta_{\text{заб}}^{-1} X_i^{\text{т}} P_{i-1} X_i\right).$$

Объединяя полученный результат с равенством (4), окончательно запишем известную форму рекуррентного метода наименьших квадратов с фактором забывания [2,3]:

$$\begin{cases} \hat{\Theta}_i = \hat{\Theta}_{i-1} + P_i X_i \varepsilon_i; \quad \varepsilon_i \overset{\Delta}{=} z_i - X_i^{\grave{o}} \hat{\Theta}_{i-1}; \\ P_i = \overline{P}_{i-1} - \overline{P}_{i-1} X_i \, X_i^{\grave{o}} \overline{P}_{i-1} \Big/ \left(1 + X_i^{\grave{o}} \overline{P}_{i-1} X_i\right); \\ \overline{P}_{i-1} = P_{i-1} / \beta_{\text{çàá}}; \quad P_0 = \mu E, \end{cases} \tag{6}$$

где ε_i − невязка идентификации, указывающая на неточность описания текущими оценками текущего отклика объекта; μ − большое положительное число, E − единичная матрица соответствующего размера.

Заметим, что для упрощения вычислений по алгоритму (6), можно воспользоваться дополнительным соотношением, получаемым из второго равенства (6), умноженным справа на X_i:

$$P_i X_i = \overline{P}_{i-1} X_i \Big/ \left(1 + X_i^{\text{т}} \overline{P}_{i-1} X_i\right). \tag{7}$$

Предлагаемые модификации рекуррентного метода наименьших квадратов с фактором забывания

В работе [5] было предложено использовать нормализующие коэффициенты для повышения эффективности вычислительных процедур алгоритма идентификации и скорости сходимости оценок (на примере другого алгоритма идентификации). В предлагаемой модификации рекуррентного метода наименьших квадратов с фактором забывания ее предполагается применять.

Суть нормализующих коэффициентов сводится к следующему. Запишем (1) в дискретном виде следующим образом

$$z_i = \theta_1 \lambda_1^{-1} \lambda_1 x_{1i} + \theta_2 \lambda_2^{-1} \lambda_2 x_{2i} + \ldots + \theta_n \lambda_n^{-1} \lambda_n x_{ni} = \Theta^{\text{т}} \Lambda^{-1} \Lambda X_i = \widetilde{\Theta}^{\text{т}} \widetilde{X}_i, \tag{8}$$

где $\Lambda \overset{\Delta}{=} \operatorname{diag}\left[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right]$ − матрица постоянных положительных ненулевых нормализующих коэффициентов, выбираемых так, чтобы средний размах нормализованных регрессоров был приблизительно одинаков; $\widetilde{X}_i \overset{\Delta}{=} \Lambda X_i$ − нормализованный вектор регрессоров; $\widetilde{\Theta} \overset{\Delta}{=} \Lambda^{-1} \Theta$ − нормализованный вектор искомых параметров. Введение нормализующих коэффициентов обеспечивает приблизительно равную скорость сходимости оценок при равных вкладах аддитивных членов отклика. Также заметим, что нормализующие коэффициенты могут быть только постоянными, поскольку по (2) оценка формируется осреднением, на которое не влияет только такая Λ.

Если проделать все те же рассуждения, что имели место при выводе алгоритма (6), только для нормализованной формы объекта (8), выразить параметр $\beta_{\text{çàá}}$ через $\Delta\beta_{\text{заб}}$ по (3), учитывая в силу малости последнего, что $\left(1 - \Delta\beta_{\text{заб}}\right)^{-1} \approx 1 + \Delta\beta_{\text{заб}}$, и записать $\Delta\beta_{\text{заб}}$ через $T_{\text{заб}}$, то рекуррентный метод наименьших квадратов с фактором забывания и нормализующими коэффициентами будет иметь более удобный для использования вид вместо (6) и (7):

$$
\begin{cases}
\hat{\Theta}_i = \hat{\Theta}_{i-1} + \Lambda \tilde{P}_i \tilde{X}_i \varepsilon_i; \quad \varepsilon_i = z_i - X_i^{\text{ò}} \hat{\Theta}_{i-1}; \\
\tilde{P}_i = \tilde{\tilde{P}}_{i-1} - \tilde{\tilde{P}}_{i-1} \tilde{X}_i \, \tilde{X}_i^{\text{ò}} \tilde{\tilde{P}}_{i-1} \Big/ \left(1 + \tilde{X}_i^{\text{ò}} \tilde{\tilde{P}}_{i-1} \tilde{X}_i\right); \\
\tilde{\tilde{P}}_{i-1} = \left(1 + \Delta t / T_{\text{çàá}}\right) \tilde{P}_{i-1}; \quad \tilde{P}_0 = \mu E; \\
\tilde{P}_i \tilde{X}_i = \tilde{\tilde{P}}_{i-1} \tilde{X}_i \Big/ \left(1 + \tilde{X}_i^{\text{ò}} \tilde{\tilde{P}}_{i-1} \tilde{X}_i\right).
\end{cases}
\qquad (9)
$$

Удобство использования алгоритма (9) в сравнении с (6), (7), не рассматривая нормализующие коэффициенты, заключается в том, что забывание задается через понятный параметр – постоянную времени забывания и замену операции деления на операцию умножения.

Для того чтобы обеспечить функциональную устойчивость алгоритма (9) в условиях линейной зависимости (периодической линейной зависимости) регрессоров предлагается 2 метода:

− регуляризацией по-Тихонову матрицы $\tilde{P}_{i-1}$ [6];

− исключением из процедуры идентификации регрессов, вносящих линейную зависимость.

Первый метод основан на том, что при появлении линейной зависимости регрессоров хотя-бы одно собственное число матрицы P_i^{-1} из (2) стремится к нулю, а значит соответствующее ему собственное число матрицы P_i рекуррентного алгоритма, стремится к бесконечности.

Регуляризованный алгоритм вместо (9) будет иметь вид:

$$
\begin{cases}
\hat{\Theta}_i = \hat{\Theta}_{i-1} + \Lambda \tilde{P}_i \tilde{X}_i \varepsilon_i; \quad \varepsilon_i = z_i - X_i^{\text{ò}} \hat{\Theta}_{i-1}; \\
\tilde{P}_i = \tilde{\tilde{P}}_{i-1} - \tilde{\tilde{P}}_{i-1} \tilde{X}_i \, \tilde{X}_i^{\text{ò}} \tilde{\tilde{P}}_{i-1} \Big/ \left(1 + \tilde{X}_i^{\text{ò}} \tilde{\tilde{P}}_{i-1} \tilde{X}_i\right); \\
\tilde{\tilde{P}}_{i-1} = \left(1 + \Delta t / T_{\text{çàá}}\right) \left(R_i \tilde{P}_{i-1} \, R_i\right); \quad \tilde{P}_0 = \mu E; \\
\tilde{P}_i \tilde{X}_i = \tilde{\tilde{P}}_{i-1} \tilde{X}_i \Big/ \left(1 + \tilde{X}_i^{\text{ò}} \tilde{\tilde{P}}_{i-1} \tilde{X}_i\right),
\end{cases}
\qquad (10)
$$

где $R_i \triangleq \mathrm{diag}\left[r_{1i}, r_{2i}, \ldots, r_{ni}\right]$ − матрицы положительных коэффициентов, определяемых по зависимости:

$$
\begin{aligned}
r_{ki} &= \sqrt{p_{\max} / p_{kk}}, \quad &&\text{если } p_{kk} > p_{\max}; \\
r_{ki} &= 1, \quad &&\text{если } p_{kk} \le p_{\max},
\end{aligned}
$$

где p_{kk} − k-ый диагональный элемент матрицы $\tilde{P}_{i-1}$, $p_{\max}$ − назначаемое положительное число, ограничивающее диагональные элементы матрицы $\tilde{P}_{i-1}$.

В алгоритме (10) реализуется регуляризация матрицы $\tilde{P}_{i-1}$ путем ограничения по величине ее диагональных элементов. Можно видеть, что результирующая матрица $\left(R_i \tilde{P}_{i-1} \, R_i\right)$ остается положительно определенной, что важно для устойчивости и сходимости алгоритма идентификации [3]. Регуляризация объясняется тем, что ее собственные числа, приближающиеся к бесконечности, искусственно уменьшены (собственные числа матрицы $\tilde{P}_{i\_1}^{-1}$, стремящиеся к нулю, − увеличены).

Доказательство положительной определенности матрицы $\left(R_i \tilde{P}_{i-1} \, R_i\right)$ при исходной положительной определенности $\tilde{P}_{i-1}$ несложно показать на основе отношения Релея [4]. Пусть

ρ − любой ненулевой вектор, тогда все собственные числа матрицы $\left(R_i \tilde{P}_{i-1}\ R_i\right)$ не выходят за пределы отношения:

$$\frac{\rho^{\text{ò}}\left(R_i \tilde{P}_{i-1}\ R_i\right)\rho}{\rho^{\text{ò}}\rho} = \frac{(\rho R_i)^{\text{ò}}\,\tilde{P}_{i-1}(R_i\rho)}{(\rho R_i)^{\text{ò}}(R_i\rho)}\,\frac{\rho^{\text{ò}}(R_i R_i)\rho}{\rho^{\text{ò}}\rho} > 0 \quad .$$

Действительно, первый сомножитель в правой части представленного соотношения больше нуля по условию положительной определенности матрицы $\tilde{P}_{i-1}$. Второй сомножитель также больше нуля как отношение одной ненулевой суммы квадратов к другой.

Доказательство регуляризирующих свойств матрицы $\left(R_i \tilde{P}_{i-1}\ R_i\right)$ по отношению к $\tilde{P}_{i-1}$ основывается на теореме о кругах Гершгорина [4]. Уменьшение диагонального элемента и соответствующих ему внедиагональных элементов исходной матрицы уменьшает по абсолютной величине область нахождения собственных чисел.

Рассмотрим второй из предложенных методов. Для его реализации целесообразно применить подход, подобный нормализующим коэффициентам. Он сводится к тому, что подобно Λ_i вводится дополнительная диагональная матрица учета Γ_i с единичными и нулевыми элементами на диагонали. Единичный диагональный элемент означает, что соответствующий ему регрессор включается в процедуру идентификации, нулевой – исключается.

В этом случае преобразованная форма объекта (1) вместо (8) будет иметь вид

$$z_i = \Theta_i^{\text{т}}\Lambda_i^{-1}\Gamma_i^{+}\Gamma_i\Lambda_i X_i = \tilde{\Theta}_i^{\text{т}}\Gamma_i^{+}\Gamma_i\tilde{X}_i = \tilde{\tilde{\Theta}}_i^{\text{т}}\tilde{\tilde{X}}_i\,, \tag{11}$$

где $\tilde{\tilde{X}}_i \triangleq \Gamma_i\tilde{X}_i$ − преобразованный вектор регрессоров; $\tilde{\tilde{\Theta}}_i \triangleq \Gamma_i^{+}\tilde{\Theta}_i$ − преобразованный вектор искомых параметров; Γ_i^{+} − псевдообратная по Муру-Пенроузу матрица относительно Γ_i [6].

Заметим, что часть преобразованных регрессоров будет нулевыми. Рассмотрим, как нулевые регрессоры влияют на функционирование алгоритма (9).

Для примера представим, что один из компонент вектора $\tilde{X}_i$ с номером *j* тождественно равен нулю, а $\beta_{\text{заб}} = 1$. Рассматривая работу алгоритма по шагам, учитывая, что матрица $\tilde{P}_0$ диагональная, можно убедится, что *j*-ая строка и *j*-ый столбец матрицы $\tilde{P}_i$, а также *j*-ый элемент вектора $\hat{\Theta}_i$ в этом случае со временем не меняются. Остальная часть матрицы $\tilde{P}_i$ и вектора $\hat{\Theta}_i$ ведет себя независимо от указанных частей. Если же $\beta_{\text{заб}} < 1$, то в дополнение к предыдущему со временем будет увеличиваться *j*-ый диагональный элемент матрицы $\tilde{P}_i$ (поскольку изначально он ненулевой).

В связи с указанным предлагается модификация алгоритма на основе (11) вместо (9) в нижеуказанном виде. Она основана на выводе алгоритма (6), только вместо (1) используется соотношение (11), с учетом полученного алгоритма (9). При этом будем учитывать, что матрица Γ_i меняется эпизодически, нечасто.

$$\begin{cases} \hat{\Theta}_i = \hat{\Theta}_{i-1} + \Gamma_i\Lambda\tilde{\tilde{P}}_i\tilde{\tilde{X}}_i\varepsilon_i; \quad \varepsilon_i = z_i - X_i^{\text{ò}}\hat{\Theta}_{i-1}; \\ \tilde{\tilde{P}}_i = \overline{\tilde{\tilde{P}}}_{i-1} - \overline{\tilde{\tilde{P}}}_{i-1}\tilde{\tilde{X}}_i\,\tilde{\tilde{X}}_i^{\text{ò}}\overline{\tilde{\tilde{P}}}_{i-1}\Big/\left(1 + \tilde{\tilde{X}}_i^{\text{ò}}\overline{\tilde{\tilde{P}}}_{i-1}\tilde{\tilde{X}}_i\right); \\ \overline{\tilde{\tilde{P}}}_{i-1} = f_j\left(\tilde{\tilde{P}}_{i-1}, \Gamma_i, \Delta\beta_{\text{çàá}}\right); \quad \tilde{\tilde{P}}_0 = \mu E; \\ \tilde{\tilde{P}}_i\tilde{\tilde{X}}_i = \overline{\tilde{\tilde{P}}}_{i-1}\tilde{\tilde{X}}_i\Big/\left(1 + \tilde{\tilde{X}}_i^{\text{ò}}\overline{\tilde{\tilde{P}}}_{i-1}\tilde{\tilde{X}}_i\right), \end{cases} \tag{12}$$

где матричная функция $f_j\left(\tilde{\tilde{P}}_{i-1}, \Gamma_i, \Delta t/T_{заб}\right)$ формируется следующим образом:

$$\begin{array}{ll} f_j\left(\tilde{\tilde{P}}_{i-1}, \Gamma_i, \Delta\beta_{заб}\right) = \left(1+\Delta t/T_{заб}\right)\Gamma_i \tilde{\tilde{P}}_{i-1}\Gamma_i, & \text{кроме } j\text{ - го диагонального элемента;} \\ \tilde{\tilde{P}}_{i-1\,jj} = \mathrm{trace}\left(\tilde{\tilde{P}}_{i-1}\right)\Big/ n, & \text{для } j\text{ - го диагонального элемента;} \end{array} \tag{13}$$

где $\mathrm{trace}(\cdot)$ − означает след матрицы-аргумента.

В результате получаем то, что если матрица Γ_i единичная, то алгоритм (13) тождественен алгоритму (9). При отключении из идентификации одного из регрессоров (обнулении соответствующего диагонального элемента матрицы Γ_i) соответствующие названному регрессору строка и столбец матрицы $\tilde{\tilde{P}}_{i-1}$ обнуляются и далее они находятся в неизменном состоянии, как и соответствующая регрессору оценка (было показано выше). При этом диагональный элемент матрицы $\tilde{\tilde{P}}_{i-1}$, стоящий на пересечении обнуленной строки и столбца, приравнивается текущему среднему значению от всех диагональных элементов этой матрицы. Последнее необходимо для того, чтобы снизить вероятность бросков оценок при подключении к идентификации рассматриваемого регрессора. В остальном алгоритм (13) ведет себя также, ка и алгоритм (9).

Для формирования матриц Λ и Γ_i можно использовать два способа: «ручной» и «автоматический».

Первый из них можно организовать следующим образом. Формирование постоянных нормализующих коэффициентов можно выполнить на основании предварительного анализа размаха регрессоров, участвующих в идентификации. Формирование текущего значения матрицы учета можно построить на основании известной логики поведения динамического объекта. Например, для устойчивого объекта при реакции на ступенчатый сигнал после переходного процесса производные стремятся к нулю.

«Автоматический» способ сводится к прямому вычислению матрицы P_i^{-1} по (2). Предложим в качестве матрицы нормализующих коэффициентов следующую

$$\Lambda = \mathrm{diag}\left[p_{11}^{-0.5}, p_{22}^{-0.5}, \ldots, p_{nn}^{-0.5}\right], \tag{14}$$

где p_{kk} − k-ый диагональный элемент матрицы P_i^{-1}.

Тогда матрица $\Lambda P_i^{-1}\Lambda$, построенная с использованием (14), будет представлять собой корреляционную матрицу вектора регрессоров: на диагонали располагаются единицы, а внедиагональные элементы являются коэффициентами корреляции регрессоров (можно использовать только наддиагональную или поддиагональную часть матрицы в силу ее симметричности). Одинаковые диагональные элементы показывают, что приведенные с помощью матрицы Λ по (14) регрессоры имеют одинаковый размах, что и требуется от нормализующих коэффициентов. Полученные нормализующие коэффициенты можно использовать для следующего этапа идентификации.

Указанные коэффициенты корреляции целесообразно использовать для формирования матрицы учета: если какой-то корреляционный коэффициент приближается к единице, то один из двух регрессоров, соответствующих этому коэффициенту можно отключать из идентификации (соответствующий диагональный элемент матрицы Γ_i обнуляется). Коэффициенты, далекие от единицы дают повод подключать к процедуре идентификации соответствующие им регрессоры (соответствующие диагональные элементы матрицы Γ_i приравниваются единице.

Пример

Рассмотрим текущую идентификацию объекта, представляющего собой колебательное звено и описанием его в виде известной дифференциальной зависимости с указанным входным сигналом [7]:

$$\ddot{y}(t) = -(2\omega\xi)\dot{y}(t) + \left(-\omega^2\right)y(t) + \left(\omega^2\right)\sin(20t), \qquad y(t_0) = y_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \tag{15}$$

где $y(t)$ – выход объекта; $\sin(2t)$ − входной сигнал; ω – собственная частота колебательного звена; ξ – относительный коэффициент затухания; y_0 и $\dot{y}_0$ – начальные значения выходной координаты объекта и ее производной. Здесь примем, что $\omega = 10c^{-1}$; $\xi = 0.5$; коэффициент усиления равен единице. Также вначале примем $y_0 = \dot{y}_0 = 0$. Будем считать, что выходная переменная, ее производные и входной сигнал непосредственно измеряются.

Для записи объекта (15) в форме (1) примем: $z(t) = \ddot{y}(t)$, $\Theta = \left[(-2\omega\xi), \left(-\omega^2\right), \left(\omega^2\right)\right]^{\mathrm{T}} = [-10, -100, 100]^{\mathrm{T}}$, $X(t) = [\dot{y}(t), \dot{y}(t), \sin(20t)]^{\mathrm{T}}$.

Размерность пространства состояний этого объекта равна 2, поэтому приведенный входной сигнал является небогатым. Легко доказать, что этот объект является управляемым по-Калману. Отсюда можно сделать вывод, что идентифицируемость объекта (15) обеспечивается только на переходном процессе – около 1.5 с. Наша задача заключается в определении свойств алгоритма идентификации при линейно зависимых факторах, поэтому будем запускать алгоритм в момент времени 5 с, когда переходный процесс практически закончился. Параметры, используемые в алгоритме идентификации: $\Delta t = 0.01$с, $\mu = p_{\max} = 10$, $T_{\text{заб}} = 1$с. Моделирование проводилось в среде Matlab.

Отметим, что в силу линейной зависимости регрессоров точное определение оценок невозможно, поэтому мы будем оценивать устойчивость алгоритма и поведение невязки идентификации. На рис.1 представлено поведение исходного рекуррентного метода наименьших квадратов с фактором забывания по зависимостям (6), (7). Мы можем наблюдать после двадцатой секунды раскачку алгоритма по всем переменным. Это при достаточно точном представлении данных: в среде Matlab по умолчанию точность всех данных – double, 64 разряда двоичного числа. Если точность уменьшить, «разваливание» алгоритма наступает раньше.

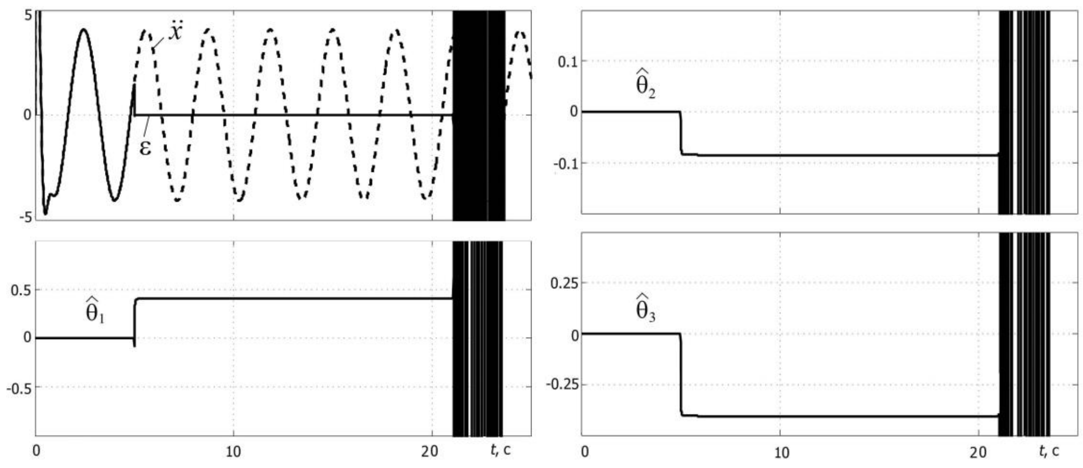

Рис.1. Поведение исходного алгоритма на вырожденном движении объекта

На рис.2 представлено поведение модификации алгоритма с регуляризацией по алгоритму (10), а на рис.3 – модификации алгоритма с исключением первого регрессора по алгоритму (12). В обоих случаях наблюдается устойчивое поведение алгоритма идентификации, получаемая модель адекватно описывает объект – невязка идентификации неизмеримо мала в сравнении с откликом объекта. Такое поведение алгоритма сохраняется и при снижении точности представления данных.

Следует отметить, что при «богатом» входном сигнале все рассматриваемые алгоритмы доставляют асимптотически точные оценки искомых параметров объекта.

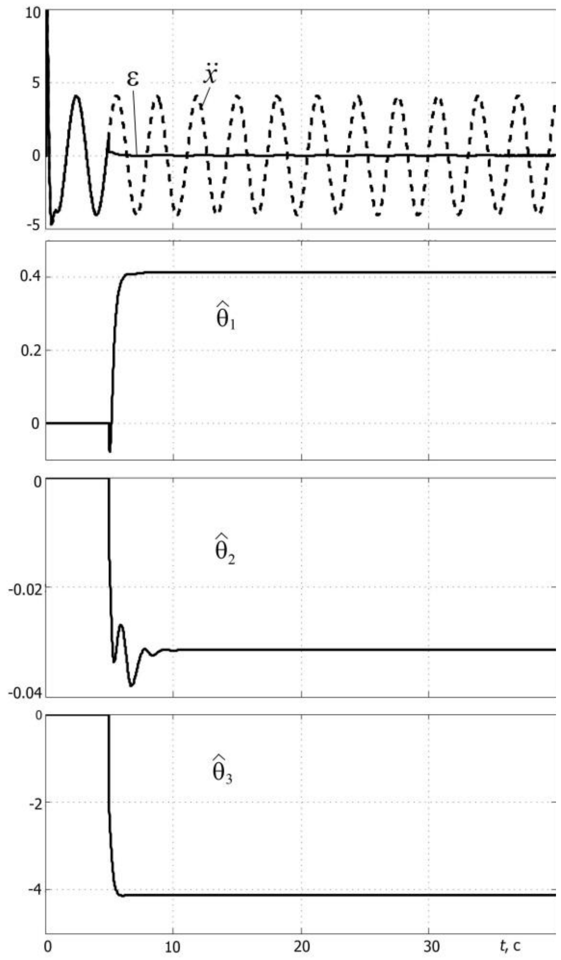

Рис.2. Функционирование модификации алгоритма с регуляризацией

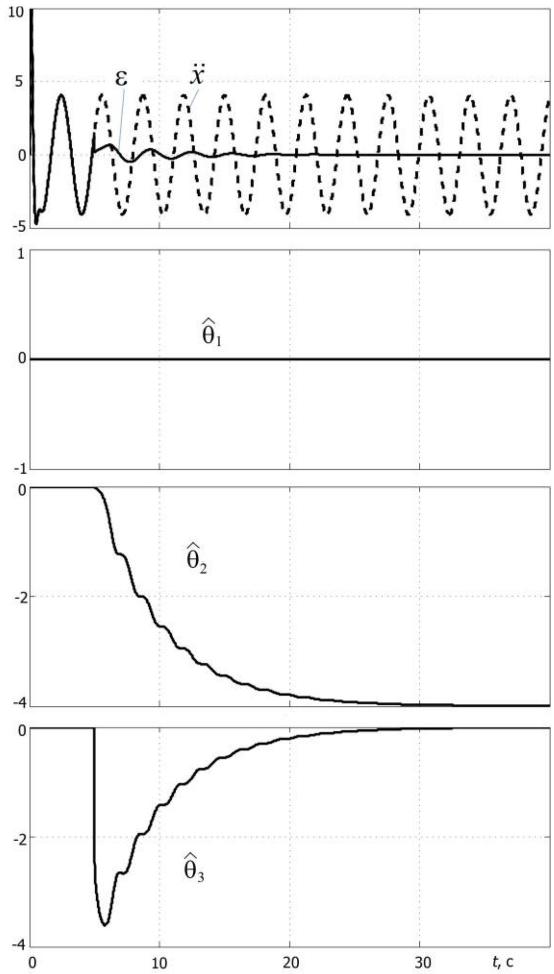

Рис.3. Функционирование модификации алгоритма с исключением первого регрессора

Заключение

Представленные модификации рекуррентного метода наименьших квадратов с фактором забывания на численном примере доказали свою эффективность по сохранению функциональной устойчивости алгоритма, представляющей стабильное описание через получаемые оценки параметров динамики исследуемого объекта в условиях даже вырожденного движения объекта.

Первая модификация, основанная на регуляризации по-Тихонову, более простая для реализации, но она вносит большие искажения в исходную достаточно эффективную процедуру оценивания параметров по методу наименьших квадратов. Поэтому ее можно рекомендовать для использования идентификации простых объектов с небольшим числом регрессоров.

Вторая модификация не нарушает процедуры метода наименьших квадратов, но ее реализация намного сложней, особенно по текущему построению матрицы учета. Поэтому ее рекомендуется использовать для идентификации более сложных объектов с большим количеством регрессоров.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Круглов С.П. Адаптивная автоматизация пилотирования самолетом на больших углах атаки на основе упрощенных условий адаптируемости: монография. – Иркутск: ИФ МГТУ ГА, 2012. 248 с.

2. Гроп Д. Методы идентификации систем: Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. 302 с.

3. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. / Под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука, 1991. 432 с.

4. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.

5. Круглов С.П. К вопросу о нормализующих коэффициентах в рекуррентных алгоритмах текущей идентификации // Информационные системы контроля и управления в промышленности и на транспорте. Выпуск 23. – Иркутск: ИрГУПС. − С. 34-38.

6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.

7. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. – СПб: Лань, 2015. 624 с.

REFERENCES

1. Kruglov S.P. Adaptivnaja avtomatizacija pilotirovanija samoletom na bol'shih uglah ataki na osnove uproshhennyh uslovij adaptiruemosti [Adaptive automation of piloting by plane on larger angles of attack on the basis of the simplified adaptability conditions]: monograph. – Irkutsk: IF MGTU GA, 2012. 248 p.

2. Graupe D. Identification of systems. Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, New York, 1976 (Russ. ed.: Graupe D. Methods of identification of systems, Moscow, Mir, 302 p.)

3. Ljung L. System Identification: Theory for the User, University of Linkoping, Sweden (Russ. ed.: Ljung L. Identifikacija sistem: teorija dlja pol'zovatelja, Moscow, Nauka, 1991, 432 p.).

4. Voevodin V.V., Kuznecov Ju.A. Matricy i vychislenija [Matrixes and calculations]. Moskow: Nauka, 1984. 320 p.

5. Kruglov S.P. K voprosu o normalizujushhih kojefficientah v rekurrentnyh algoritmah tekushhej identifikacii [To a question of the normalizing coefficients in the recurrent algorithms of the current identification] // Informacionnye sistemy kontrolja i upravlenija v promyshlennosti i na transporte. Vypusk 23, Irkutsk: IrGUPS, pp. 34-38.

6. Gantmaher F.R. Teorija matric [Theory of matrixes]. Moskow: Nauka, 1988, 552 p.

7. Pervozvanskij A.A. Kurs teorii avtomaticheskogo upravlenija [Course of the theory of automatic control.]. SPb. Lan'. 2015. 624 p.

Информация об авторах

Круглов Сергей Петрович – д.т.н., профессор, профессор кафедры «Автоматизация производственных процессов», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: kruglov_s_p@mail.ru

Authors

Kruglov Sergey Petrovich − doctor of technical sciences, professor of department «Automation of production operations», Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: kruglov_s_p@mail.ru

Для цитирования

Круглов С.П. Модификации рекуррентного метода наименьших квадратов с фактором забывания для функциональной устойчивости текущего параметрического оценивания ди-

намических процессов // «Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами»: электрон. науч. журн. – 2019. – №1. – С. 1-11 – Режим доступа: http://ismm-irgups.ru/toma/11-2019, свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус., англ. (дата обращения: 25.02.2019)

For citation

Kruglov S.P. Modifikatsii rekurrentnogo metoda naimen'shikh kvadratov s faktorom zabyvaniya dlya funktsional'noy ustoychivosti tekushchego parametricheskogo otsenivaniya dinamicheskikh protsessov [Modifications of the rekkurent method of least squares with forgetting factor for the functional stability of the current parametrical estimation of dynamic processes] // Informacionnye tehnologii i matematicheskoe modelirovanie v upravlenii slozhnymi sistemami: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal [Information technology and mathematical modeling in the management of complex systems: electronic scientific journal], 2019. No. 1. P. 1-11. [Accessed 25/02/19]