УДК 518.852+518.853

С.И. Носков [1]

[1] *Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация*

ТОЧЕЧНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. *Одной из центральных проблем бурно развивающейся в последнее время интервальной математики является классическая проблема описания, исследования и применения множеств решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ). Множество решений ИСЛАУ может быть определено по-разному, в зависимости от того, какими кванторами связаны коэффициенты левой и правой частей этой системы. Поскольку каждое искомое множество решений ИСЛАУ задается областью совместности системы линейных неравенств и в ряде случаев одного нелинейного условия, при решении практических задач с ним работать трудно. Поэтому в работе предлагается способ точечной характеризации множеств решений ИСЛАУ, состоящий в использовании известного в теории многокритериального выбора приема максимизации разрешающей способности указанных неравенств. В случае пустоты искомого множества предлагается по аналогии с теорией некорректных задач искать так называемое квазирешение ИСЛАУ. При этом в обоих этих случаях необходимо решать задачу линейного или частично булевого линейного программирования.*

Ключевые слова. *Интервальная система линейных алгебраических уравнений, характеризация, квазирешение, задача частично булевого линейного программирования.*

S.I. Noskov[1]

[1] *Irkutsk state University of railway engineering, Russian Federation.*

POINT CHARACTERIZATION OF SOLUTION SETS OF AN INTERVAL SYSTEM OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

Abstract. *One of the central problems of the rapidly developing interval mathematics is the classical problem of describing, researching and applying sets of solutions to an interval system of linear algebraic equations (ISLAE). The set of solutions of ISLAU can be determined in different ways, depending on which quantifiers the coefficients of the left and right parts of this system are related to. Since every desired set of solutions of ISLAE is given by the domain of compatibility of a system of linear inequalities and, in a number of cases, one nonlinear condition, it is difficult to work with practical problems with it. Therefore, the paper proposes a method of point characterization of the sets of solutions of ISLAE, consisting in using the well-known in the theory of multicriteria choice of the maximization of the resolution of the indicated inequalities. In the case of the emptiness of the required set, it is proposed, by analogy with the theory of ill-posed problems, to seek a quasisolution of ISLAE. In both cases, it is necessary to solve problem of linear or partial boolean linear programming.*

Keywords. *Interval system of linear algebraic equations, characterization, quasisolution, task of partially Boolean linear programming.*

Одной из центральных проблем бурно развивающейся в последнее время интервальной математики является классическая проблема описания, исследования и применения множеств решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ):

$[\mathrm{A}^-, \mathrm{A}^+]\ \mathrm{x} = [b^-, b^+]$, где $\mathrm{A}^-, \mathrm{A}^+$ - (m×n) – матрицы;

b^-, b^+ - (n×1) – векторы. (1)

Множество решений ИСЛАУ может быть определено по-разному, в зависимости от того, какими кванторами связаны коэффициенты левой и правой частей (1) (см., например, [1-10]):

$\mathrm{P}_1 = \{\mathrm{x} \in R^n \mid \exists\, \mathrm{A} \in [\mathrm{A}^-, \mathrm{A}^+]\ \exists\, b \in [b^-, b^+]\ \mathrm{A}x = b\}$,

$\mathrm{P}_2 = \{\mathrm{x} \in R^n \mid \forall\, \mathrm{A} \in [\mathrm{A}^-, \mathrm{A}^+]\ \exists\, b \in [b^-, b^+]\ \mathrm{A}x = b\}$,

$\mathrm{P}_3 = \{\mathrm{x} \in R^n \mid \forall\, b \in [b^-, b^+]\ \exists\, \mathrm{A} \in [\mathrm{A}^-, \mathrm{A}^+]\ \mathrm{A}x = b\}$,

$\mathrm{P}_4 = \{\mathrm{x} \in R^n \mid (\forall\, \mathrm{A} \in [\mathrm{A}^-, b^+]\ \exists\, b \in [b^-, b^+]\ \mathrm{A}x = b) \wedge (\forall\, a \in [b^-, b^+]\ \exists\, D \in [\mathrm{A}^-, \mathrm{A}^+]\ Dx = a)\}$.

Очевидны следующие соотношения между P_i , i = $\overline{1,4}$:

$P_1 = P_2 \cup P_3 \supseteq P_4 = P_2 \cap P_3$.

В упомянутых работах показано, что множества решений ИСЛАУ представимы в виде:

$P_1 = \{x = y - z \mid y, z \in R_+^n, (y, z) = 0,\ A^- y - A^+ z \le b^+,\ A^+ y - A^- z \ge b^-\}$,

$P_2 = \{x = y - z \mid y, z \in R_+^n, A^- y - A^+ z \ge b^-, A^+ y - A^- z \le b^+\}$,

$P_3 = \{x = y - z \mid y, z \in R_+^n, (y, z) = 0,\ A^- y - A^+ z \le b^-,\ A^+ y - A^- z \ge b^+\}$,

$P_4 = \{x = y - z \mid y, z \in R_+^n, (y, z) = 0,\ A^- y - A^+ z = b^-,\ A^+ y - A^- z = b^+\}$.

Таким образом, лишь множество P_2 представляет собой область совместности двух систем линейных неравенств. Для множеств P_1, P_3 , P_4 эти области дополняются нелинейным равенством:

(y, z) = 0. (2)

От него, впрочем, можно избавиться посредством расширения размерности задачи введением n булевых переменных по правилу:

$0 \le y_i \le \sigma_i M$, (3)

$0 \le z_i \le (1 - \sigma_i) M$, (4)

$\sigma_i = 0,1$, i = $\overline{1,n}$, M – большое положительное число. (5)

Таким образом, будут справедливы импликации:

$\sigma_i = 0 \Longrightarrow x_i = -z_i \le 0$,

$\sigma_i = 1 \Longrightarrow x_i = y_i \ge 0$,

гарантирующие выполнение условия (2).

Множество P_4 представляет собой область совместности двух систем линейных равенств и нелинейного условия (z, y) = 0.

Отметим, что вопросам исследования множеств решений ИСЛАУ посвящена обширная литература (см., в частности, кроме уже упомянутых, работы [11-17]).

Дальнейшее изложение будем проводить на примере множества P_2 . Перенос соответствующих результатов на множества P_1, P_3 осуществляется при этом очевидной заменой типов ограничений и правых частей соответствующих систем неравенств. Две системы линейных равенств, задающих множество P_4 , можно представить четырьмя системами линейных неравенств, если воспользоваться известным приемом представления равенства e = f двумя неравенствами e ≤ f и e ≥ f . Естественно, нелинейность (2) при этом сохранится.

1. Рассмотрим случай непустоты множества решений P_2 ($P_2 \ne \emptyset$).

При решении конкретных практических задач с множеством решений ИСЛАУ работать трудно. Поэтому иногда удобнее пользоваться какой-либо его точечной характеризацией, определяемой некоторой убедительной содержательной эвристикой. Одна из таких эвристик может базироваться на приеме, часто применяемом в теории принятия решений при построении линейной свертки локальных критериев оптимальности в задачах векторной оптимизации (см., например,[18, 19, 10]). Там это производится посредством опроса экспертов, которые формируют информацию «мягкого» характера по отношению к оценке сравнительной важности локальных критериев путем указания пар объектов, для которых критерий-агрегат на первом объекте принимает значения не меньшее, чем на втором. Такие сравнительные экспертные оценки приводят к формированию системы линейных неравенств, области совместности которых, как, правило, множественны. Для того, чтобы определить единственную оценку параметров искомой свертки локальных критериев, в теории принятия решений применяется прием максимизации разрешающей способности указанных неравенств, их усиления. Этот прием может быть эффективно использован и для точечной характеризации множеств решений ИСЛАУ. Для множества P_2 это приведет к необходимости решения следующей задачи линейного программирования (ЛП):

$A^- y - A^+ z - u \ge b^-$, (6)

$A^+ y - A^- z + v \le b^+$, (7)

$y \ge 0,\ z \ge 0,\ u \ge 0,\ v \ge 0$, (8)

$\sum_{i=1}^{m} (u_i + v_i) \to \max$. (9)

Нетрудно убедиться, что задача ЛП (6) – (9) может быть заменена на эквивалентную ей задачу ЛП вида:

$$\mathrm{A}^{-}y - \mathrm{A}^{+}z \geq b^{-}, \quad (10)$$
$$\mathrm{A}^{+}y - \mathrm{A}^{-}z \leq b^{+}, \quad (11)$$
$$y \geq 0,\ z \geq 0, \quad (12)$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^{-} - a_{ij}^{+})(y_j - z_j) \to \max. \quad (13)$$

Такая характеризация позволяет, кроме того, несколько снизить неопределенность исходной задачи путем сужения задающих правую часть системы (1) интервалов заменой b^{-} на b^{-} + u , а b^{+} на $b^{+} - v$.

2. Пусть теперь множество решений P_2 пусто ($\mathrm{P}_2 = \emptyset$).

В этом случае, в соответствии с теорией решения некорректных задач, можно искать так называемое квазирешение исходной задачи (см., например, [20, 21]. Идея его поиска состоит во внесении искажений во все ограничения (10), (11), гарантирующих их выполнение и последующей минимизации этих искажений. Это приводит к решению следующей задачи ЛП:

$$\mathrm{A}^{-}y - \mathrm{A}^{+}z + u \geq b^{-}, \quad (14)$$
$$\mathrm{A}^{+}y - \mathrm{A}^{-}z - v \leq b^{+}, \quad (15)$$
$$y \geq 0,\ z \geq 0,\ u \geq 0,\ v \geq 0, \quad (16)$$
$$\sum_{i=1}^{m}(u_i + v_i) \to \min. \quad (17)$$

Повторим, что для поиска точечных характеризаций множеств P_1, P_3 и P_4 в задачах (6) – (9) и (10) – (13) естественным образом следует заменить соответствующие ограничения и ввести условия (3) – (5), что приведет к необходимости решения задач частично-булевого линейного программирования. То же самое касается и задач поиска квазирешений в описаниях P_1, P_3 и P_4 .

Отметим существование одного важного практического приложения предложенных способов точечной характеризации множеств решений ИСЛАУ и поиска соответствующих квазирешений.

Пусть необходимо построить линейное регрессионное уравнение:

$$s_k = \sum_{i=1}^{l}\alpha_i r_{ki} + \varepsilon_k\ ,\ \mathrm{k} = \overline{1,m}\ . \quad (18)$$

Здесь s и r_i – зависимая и i-ая независимая переменные, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)^T$- подлежащий оцениванию вектор параметров, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)^T$- ошибки аппроксимации.

Пусть также, в отличие от традиционного регрессионного анализа, выборка наблюдений для независимых и зависимой переменных задана не точечно, а интервально, то есть имеет вид ($[R^{-}, R^{+}], [S^{-}, S^{+}]$). В этом случае естественным образом будет «работать» весь приведенный выше математический аппарат, то есть искомый вектор α будет либо точечной характеризацией соответствующего множества, либо квазиоценкой по отношению к нему. При этом при интервальности только для s_k следует работать с множеством P_2 , только для r_{ki} – с P_3 , для s_k и r_{ki} одновременно – с P_1 .

Заметим, что впервые идея реализации изложенных выше подходов изложена в монографии [10].

2. Примеры.

Рассмотрим простой численный пример. Пусть ИСЛАУ задана следующим образом:

$$A^- = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^+ = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad b^- = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad b^+ = \begin{pmatrix} 14 \\ 17 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в этом случае множество $P_2 \neq \emptyset$, найдем его точечную характеризацию, решив любую из задач (6) – (9) или (10) – (13) :

y = (0, 1.5), z = (0, 0), то есть x = (0, 1.5),

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 6.5 \\ 5.5 \end{pmatrix}.$$

Такая характеризация позволяет сузить задающие правую часть системы (1) интервалы $[b^-,\ b^+]$ заменой их нижней и верхней границ соответственно на:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 7.5 \\ 10.5 \\ 13.5 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь необходимо построить регрессионное уравнение (18) по выборке:

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 7 & 9 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}, \quad S^- = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 26 \end{pmatrix}, \quad S^+ = \begin{pmatrix} 19 \\ 31 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Поскольку здесь имеет место интервальность только для s_k , работать следует с множеством P_2 , а поскольку, как легко убедиться, оно пусто, нужно найти квазиоценки параметров α_1 и α_2, решив задачу ЛП (14) – (17). Уравнение (18) примет вид:

$s_k = 3.33r_{k1} - 0.22r_{k2} + \varepsilon_k$, k = $\overline{1,3}$, где $\varepsilon = (0, 0, 4)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шарый С.П. О характеризации объединенного множества решений интервальной линейной алгебраической системы // Деп. в ВИНИТИ, 1990.-№726-В91.-20 с.
2. Beeck H. Uber die Struktur und Abschatzungender der Losungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Inter-valikoeffizienten // Computing. -1972. –V.10. –P.P. 231-244.
3. Oettli W. On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients //SIAM J. Numer. Anal. -1965. –V.2. –P.P.115-118.
4. Шайдуров В.В., Шарый С.П. Решение интервальной алгебраической задачи о допусках // Препринт КрВЦ СО АН СССР.- Красноярск, 1988.-№4.-24 с.
5. Шарый С.П. О разрешимости линейной задачи о допусках // Интерв. вычисления.-1991.-№1.-с. 92-98.
6. Rohn I. Inner solutions of linear interval system //Interval Math. 1985/ Ed. K.Nickel – New-York: Springer Verlag. -1986. –P.P.157-158.
7. Хлебалин Н.А., Шокин Ю.И. Интервальный вариант метода модального управления // Докл. АН СССР.-1991.-т.316.-№4.-с.846-850.
8. Захаров А.В., Шокин Ю.И. Синтез систем управления при интервальной неопределенности параметров их математических моделей // Докл. АН СССР.-1988.-т.229.-№299.-№2.-с.292-295.
9. Ratschek H., Sauer W. Linear interval equation //Computing. -1982. –V.28. -№2. – P.P.105-115.
10. Носков С.И. Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных. Иркутск: Облинформпечать, 1996.- 320 с.

11. Шарый С.П. Интервальная регуляризация для решения систем линейных алгебраических уравнений // Марчуковские научные чтения – 2017, Труды Международной научной конференции.2017. с. 975-982.

12. Шарый С.П. Сильная согласованность в задаче восстановления зависимостей при интервальной неопределенности данных // Вычислительные технологии.2017. Т. 22. №2. с. 150-172.

13. Shary S.P. Maximum consistency method for data fitting under interval uncertainty // Journal of Global Optimization. 2016. Т. 66. №1. с. 111-126.

14. Kreinovich V., Shary S.P. Interval methods for data fitting under uncertainty: a probabilistic treatment // Reliable Computing. 2016. Т. 23. с.105-140.

15. Sharaya I.A, Shary S.P. Reserve of characteristic inclusion as recognizing functional for interval linear systems // Lecture Notes in Computer Science, 2016. Т. 9553. с. 148-167.

16. Шарый С.П. Новые характеризации множества решений для интервальных систем линейных уравнений // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21. №5. с. 111-118.

17. Shary S.P. Maximum consistency method for data fitting interval uncertainty // Journal of Global Optimization. 2015. Т. 63. с. 1.

18. Васильев С.Н., Селедкин А.П. Синтез функции эффективности в многокритериальных задачах принятия решений // Известия АН СССР. Тех. кибернетика. – 1980.-№3.-с.186-190.

19. Носков С.И., Протопопов В.А. Оценка уровня уязвимости объектов транспортной инфраструктуры: формализованный подход//Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2011. - Вып. №4 (32). - С. 241-244.

20. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.- М.: Наука, 1986.-288 с.

21. Тихонов А.Н. и др. Регуляризующие алгоритмы и априорная информация.- М.: Наука, 1983.-200 с.

REFERENCES

1. Shary S.P. On the characterization of the combined set of solutions of an interval linear algebraic system, Dep. in VINITI, 1990.-No. 726-B91.-20 p.

2. Beeck H. Uber die Struktur und Abschatzungender der Losungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Inter-valikoeffizienten // Computing. -1972. -V.10. -P.R. 231-244

3. Oettli W. On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients. SIAM J. . Numer. Anal. -1965. -V.2. -P.P.115-118.

4.Shaidurov V.V., Shary SP Solution of the interval algebraic tolerance problem // Preprint KrVTS SO SB AS, Krasnoyarsk, 1988.-№4.-24 p.

5. Shary S.P. On the solvability of the linear admissibility problem // Interv. calculations.-1991.-No.1-s. 92-98.

6. Rohn I. Inner solutions of linear interval system // Interval Math. 1985 / Ed. K.Nickel - New-York: Springer Verlag. -1986. -P.P.157-158.

7. Khlebalin N.A., Shokin Yu.I. Interval version of the modal control method. Dokl. AN SSSR.-1991.-t.316.-No.4-p. 846-850.

8. Zakharov A.V., Shokin Yu.I. Synthesis of control systems for interval uncertainty of parameters of their mathematical models // Dokl. AN SSSR.-1988.-t.229.-№299.-No.22-p.292-295.

9. Ratschek H., Sauer W. Linear interval equation // Computing. -1982. -V.28. -№2. -P.P.105-115.

10. Noskov S.I. The technology of modeling objects with unstable functioning and uncertainty in the data. Irkutsk: Oblinformpechat, 1996. - 320 p.

11. Shary S.P. Interval regularization for solving systems of linear algebraic equations // Marchukovskie scientific readings - 2017, Proceedings of the International Scientific Conference. from. 975-982.

12. Shary S.P. Strong consistency in the task of recovering dependencies with interval uncertainty of data // Computational technologies.2017. T. 22. № 2. from. 150-172.

13. Shary S.P. Maximum consistency method for data. 2016. T. 66. № 1. from. 111-126.

14. Kreinovich V., Shary S.P. Interval methods for data: The probabilistic treatment // Reliable Computing. 2016. Vol. 23. p.105-140.

15. Sharaya I.A, Shary S.P. Reserve of the characteristic inclusion as recognizing the functional for the interval linear systems // Lecture Notes in Computer Science, 2016. Vol. 9553. p. 148-167.

16. Shary S.P. New characterizations of the solution set for interval systems of linear equations // Computational technologies. 2016. Vol. 21. №5. from. 111-118.

17. Shary S.P. Maximum consistency method for data fitting interval uncertainty // Journal of Global Optimization. 2015. Vol. 63. p. 1.

18. Vasilyev SN, Sededkin A.P. Synthesis of the efficiency function in multicriteria decision-making problems // Izvestiya AN SSSR. Those. cybernetics. - 1980.-№3.-p.186-190.

19. Noskov S.I., Protopopov V.A. Assessment of the level of vulnerability of transport infrastructure objects: a formalized approach // Modern technologies. System analysis. Modeling. - 2011. - Вып. № 4 (32). - P. 241-244.

20. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Methods for solving ill-posed problems .- Moscow: Nauka, 1986.-288 p.

21. Tikhonov A.N. Regularizing algorithms and a priori information. - Moscow: Nauka, 1983. -200 p.

Информация об авторе

Носков Сергей Иванович – д.т.н., профессор, профессор кафедры «Информационные системы и защита информации», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: noskov_s@irgups.ru

Author

Sergey Ivanovich Noskov, Doctor of Technical Science, Professor, the Subdepartment Information systems and information security, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: noskov_s@irgups.ru

Для цитирования

Носков С.И. Точечная характеризация множеств решений систем интервальных систем линейных алгебраических уравнений// «Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами»: электрон. науч. журн. – 2018. – №1. – С. 8-13 – Режим доступа: http://ismm-irgups.ru/toma/11-2018, свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус., англ. (дата обращения: 01.10.2018)

For citation

Noskov S.I. Tochechnaya harakterizaciya mnozhestv reshenij sistem interval'nyh sistem linejnyh algebraicheskih uravnenij [Point characterization of solution sets of an interval systems of linear algebraic equation] // Informacionnye tehnologii i matematicheskoe modelirovanie v upravlenii slozhnymi sistemami: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal [Information technology and mathematical modeling in the management of complex systems: electronic scientific journal], 2018. No. 1. P. 8-13. [Accessed 01/10/18]